

## ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.** Αν  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $n$  φορές παραγωγίσιμη με  $f^{(k)}, k = 0, 1, \dots, n - 1$  εκθετικής τάξης  $r$  και  $f^{(n)}$  κατά τμήματα συνεχή, τότε η  $f^{(n)}$  μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](s) = s^n \mathcal{F}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad s > r.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.** Αν  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής κατά τμήματα και εκθετικής τάξης  $r$ , τότε η συνάρτηση  $\int_0^t f(s) ds$  μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right](s) = \frac{1}{s} F(s), \quad s > \max\{0, r\}.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.** Ας είναι  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια εκθετικής τάξης  $r$  συνάρτηση. Αν η συνάρτηση  $\frac{f(t)}{t}$  είναι συνεχής κατά τμήματα, τότε μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f(t)/t](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](u) du, \quad s > r.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4.** Αν  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης  $r$ , τότε η συνάρτηση  $\mathcal{L}[f](s)$  έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα  $(r, \infty)$  και

$$\frac{d}{ds^n} \mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s), \quad s > r \quad n = 1, 2, \dots$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5** Αν για την συνάρτηση  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η παράγωγος  $f'$  είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης  $r$ , τότε

i)  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(0).$

ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$

**Ορισμός.** Συνέλιξη συναρτήσεων  $(f * g)$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6** Ας είναι  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Είναι:

(i)  $(f * g)(t) = (g * f)(t)$

(ii)  $f * (kg + mh)(t) = k(f * g)(t) + m(f * h)(t) \quad (k, m \in \mathbb{R})$

(iii)  $[f * (g * h)](t) = [(f * g) * h](t)$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7** Αν  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συνεχείς κατά τμήματα και εκθετικών τάξεων  $r_1, r_2$  αντίστοιχα, τότε η συνέλιξη των  $f, g$  ορίζεται για  $s > \max\{r_1, r_2\}$  και είναι

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s), \quad s > \max\{r_1, r_2\}.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8** Αν  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια πραγματική συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται στο  $(s_0, \infty)$  και  $a > 0$  είναι μια πραγματική σταθερά, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ f(t - a), & a \leq t. \end{cases}$$

ορίζεται για  $s > s_0$  και είναι

$$\mathcal{L}[g](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s), \quad s > s_0.$$

**Παραδείγματα. Ασκήσεις.**